

# Kalibrierung der Laufzeitstrukturen der Ausfallwahrscheinlichkeiten: Markovsch oder nicht Markovsch, das ist die Frage

*Im Bereich der Kreditrisikomodellierung wird die Frage diskutiert, ob sich die Laufzeitstrukturen der Ausfallwahrscheinlichkeiten durch Markovketten modellieren lassen. Christian Bluhm und Ludger Overbeck zeigen, dass sich über viele Jahre beobachtete, empirische Ausfallhäufigkeiten gut durch Markovketten mit kontinuierlichem Zeitparameter interpolieren lassen, wenn man eine zeitlich inhomogene Entwicklung des Verhaltens der Markovkette zulässt*

Für einen Kunden ist die Ausfallwahrscheinlichkeit (PD) ein grundlegender Risikoparameter im Kreditrisikomanagement. In der Praxis wird den in der Masterskala einer Bank enthaltenen Ratingklassen normalerweise eine einjährige PD zugewiesen, die den regulatorischen Anforderungen entspricht (siehe Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004)). Tabelle A zeigt ein Beispiel für die Ausfallhäufigkeiten, die Standard & Poor's (S&P) den Ratingklassen zuordnet.

Außerdem erfordern einige Konzepte der Kreditrisiko-

A. Die einjährigen Ausfallhäufigkeiten der S&P Ratings	
	Ausfallhäufigkeiten
AAA	0,00 %
AA	0,01 %
A	0,04 %
BBB	0,29 %
BB	1,28 %
B	6,24 %
CCC	32,35 %

Anmerkung: siehe Standard & Poor's (2005), Tabelle 9

modellierung, wie z.B. abhängige Ausfallzeiten, mehrjährige Kreditbepreisung, sowie ökonomisches Kapital mit multiplem Horizont, Ausfallwahrscheinlichkeiten, die sich auf Zeiträume von mehr als nur einem Jahr beziehen. Für die mehrjährige Kreditrisikomodellierung benötigen Banken daher eine Kurve kumulativer Ausfallwahrscheinlichkeiten ( $p_R^{(t)} \geq 0$  von „PD Term Structure“) für jede Ratingklasse  $R$  (siehe etwa Bluhm, Overbeck & Wagner (2003) für eine Einführung in PD Term Structures und Bluhm & Overbeck (2006) für Beispiele bzgl. deren Anwendung auf strukturierte Kreditprodukte).

Jede Bank hat ihre eigene, proprietäre Methode für die Kalibrierung von PD Term Structures<sup>1</sup> auf ihre internen und externen Daten. Für die Generierung von PD Term Structures sind verschiedene, auf Markov-Ketten beruhende Ansätze aktueller Marktstandard, wobei in den meisten Fällen homogenen<sup>2</sup> Ketten benutzt werden. Grundlegend ist in diesem Bereich die Arbeit von Jarrow, Lando & Turnbull (1997). Verschiedene Autoren haben in dieser Richtung weiter geforscht, darunter Kadam & Lenk (2005), Lando & Skodeberg (2002), Sarfaraz, Cohen & Liberos (2004), Schürmann & Jafry (2003a und 2003b) sowie Trück & Özturkmen (2003). Frydman & Schürmann (2005) haben kürzlich einen neuen Ansatz vorgestellt, der mit Markovschen Mischungen arbeitet.

Die Theorie der Markov-Ketten (siehe Noris (1998)) unterscheidet zwischen Ketten mit diskreter Zeit und solchen mit stetiger Zeit. Eine Kette mit diskreter Zeit lässt sich bestimmen durch eine einjährige Migrations- oder Übergangsmatrix  $M$ , die mehrjährige Übergänge durch Potenzen ( $M^k$ ) <sub>$k \geq 1$</sub>  von  $M$  generiert. Die entsprechenden (jährlichen) PD Term Structures mit diskreter Zeit sind gegeben durch<sup>3</sup>:

$$p_R^{(k)} = (M^k)_{Zeile(R),8} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

wobei  $Zeile(R)$  die Zeile in der Migrationsmatrix  $M$  bezeichnet, die dem Rating  $R$  entspricht. Ketten in stetiger Zeit werden durch eine Q-Matrix<sup>4</sup>  $Q$  bestimmt, so dass  $\exp(tQ)$  die

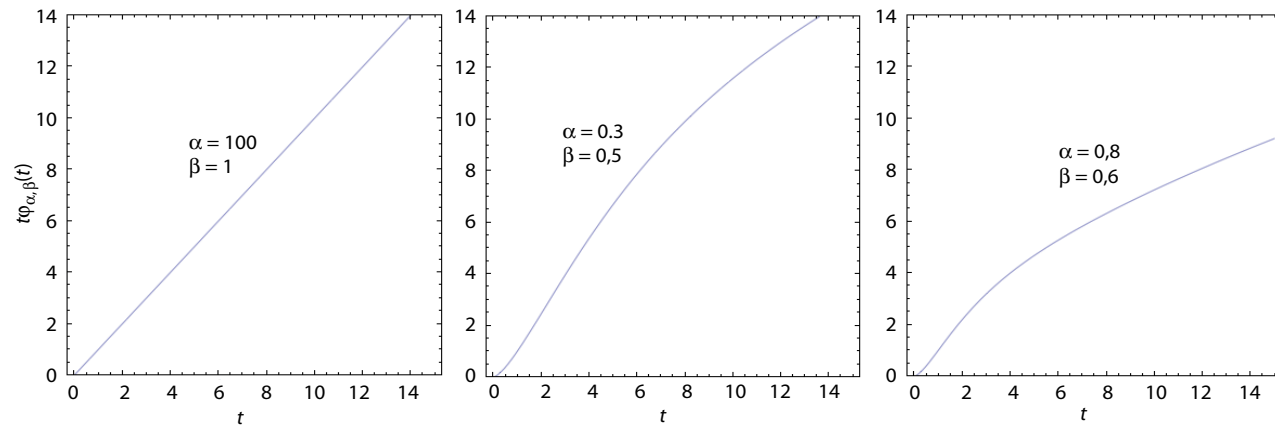
<sup>1</sup> In der Literatur werden die PD Term Structures mitunter als Kreditkurven bezeichnet.

<sup>2</sup> Eine Markov-Kette heißt homogen, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von der Zeit abhängen.

<sup>3</sup> Der zweite Index, '8' in der nachstehenden Schreibweise bezieht sich auf die achte (Ausfall-) Spalte in den  $8 \times 8$  Migrationsmatrices von S&P.

<sup>4</sup> Eine Quadratmatrix  $Q$  ist eine Q-Matrix/ein Generator wenn gilt  $\sum_{j=1}^8 q_{ij} = 0 \forall i, q_{ii} \leq 0 \forall i$  und  $q_{ij} \geq 0 \forall i \neq j$

## 1 Veranschaulichung der Funktionen $\varphi_{\alpha,\beta}$ für verschiedene $\alpha$ und $\beta$



Migrationsmatrix für das Zeitintervall  $[0, t]$  repräsentiert, wobei  $\exp(\cdot)$  die Matrixexponentialfunktion bezeichnet. Die dem Generator  $Q$  entsprechenden PD Term Structures in stetiger Zeit sind gegeben durch:

$$p_R^{(t)} = (\exp(tQ))_{Zeile(R),8} \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

Markov-Ketten mit stetiger Zeit sind Ketten in diskreter Zeit überlegen, denn sie eröffnen die Möglichkeit der konsistenten Messung von Migrationen und PDs für Zeithorizonte zwischen jährlichen Zeitgitterpunkten. Für eine Kette in diskreter Zeit, die durch eine einjährige Migrationsmatrix  $M$  definiert ist, ermitteln wir den Generator  $Q$  wie folgt:

$$M = \exp(Q) \quad (2)$$

Wünschenswert ist die Möglichkeit der Einbettung einer Kette mit diskreter Zeit in eine Kette mit stetiger Zeit, wobei wir generell nur erwarten können, approximative Einbettungen zu finden (siehe Israel, Rosenthal & Wei (2001), Jarrow, Lando & Turnbull (1997), Kreinin & Sidelnikova (2001) sowie Bluhm & Overbeck (2003, Kapitel 6)). In Bluhm & Overbeck (2006), Abschnitt 2.3.1, diskutieren wir das Beispiel eines Generators  $Q$ , der sehr gut an eine vorgegebene einjährige Matrix von S&P angepasst ist (siehe Anhang II).

In der Praxis stellt man jedoch fest, dass auch ein gut angepasster Generator eventuell modellimplizierte PD Term Structures generiert, die erheblich von tatsächlich im Markt beobachteten mehrjährigen Ausfallhäufigkeiten abweichen. In diesem Artikel

zeigen wir, dass diese Beobachtung nicht unbedingt zur Verwerfung der Markov-Annahme führen muss, sondern dass man durch ein Fallenlassen der Homogenitätsannahme auf Basis zeitlich inhomogener Markov-Ketten mit stetiger Zeit (NHCTMCs) durchaus eine sehr gute Interpolation empirisch beobachteter Ausfallhäufigkeiten erzielen kann. Abbildung 2 illustriert deutlich, dass die Markov-Annahme im Kontext der Kalibrierung von PD Term Structures keineswegs so fragwürdig ist, wie mitunter pauschal behauptet wird. Tatsächlich eröffnet die Aufgabe der Homogenitätsannahme genug Flexibilität, um einen Markov-Prozess in angemessener Qualität auf empirische Migrations- und Ausfallhäufigkeiten hin zu kalibrieren. Daher beantworten wir die in der Überschrift aufgeworfene Frage mit: ‚Markovsch‘, aber ‚nicht homogen‘.

### Kalibrierung einer NHCTMC für PD Term Structures

Im Folgenden konstruieren wir eine NHCTMC, welche wir verwenden, um PD Term Structures zu generieren. In Anhang I stellen wir ein paar Bemerkungen zur stochastischen Begründung unseres Ansatzes zusammen. Anhang III erläutert die Daten, welche Abbildung 2 zugrunde liegen und zur Kalibrierung des Modells verwendet wurden.

Ausgangspunkt ist der Generator  $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq 8}$  aus Tabelle D, der in dem in Anhang II gegebenen Beispiel erläutert wird. Im Gegensatz zum zeithomogenen Fall gehen wir nicht mehr davon aus, dass die Übergangsraten  $q_{ij}$  im Zeitverlauf konstant sind, was bei homogenen Markov-Ketten mit stetiger Zeit (HCTMCs) der Fall ist. Stattdessen ersetzen wir den homogenen Generator  $Q$ , der zu den Migrationsmatrizen  $\exp(tQ)$  für das Zeitintervall  $[0, t]$  führt, durch den zeitabhängigen Generator:

$$Q_t = \Phi(t) \times Q \quad (3)$$

wobei  $\times$  die Matrixmultiplikation bezeichnet und  $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 8}$  die diagonale Matrix in  $\mathbb{R}^{8 \times 8}$  ist, mit:

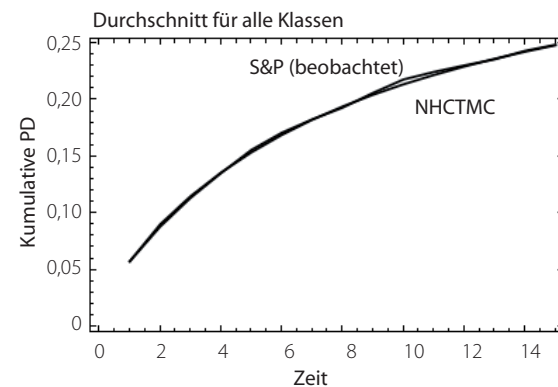
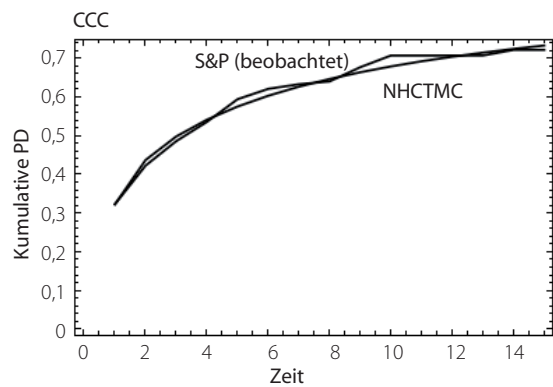
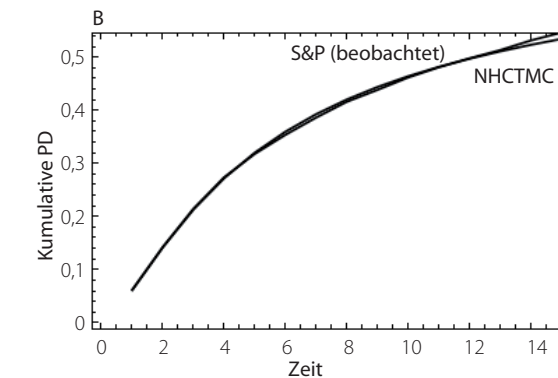
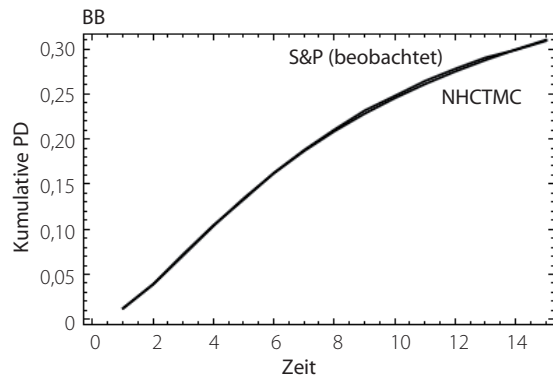
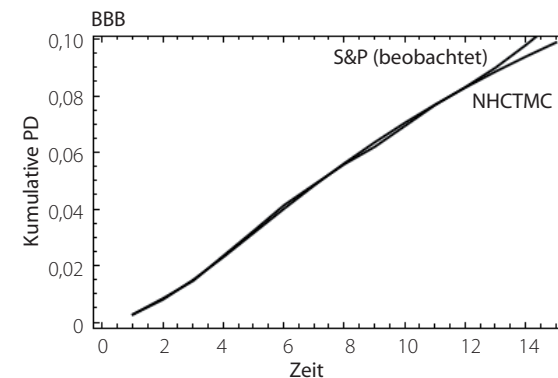
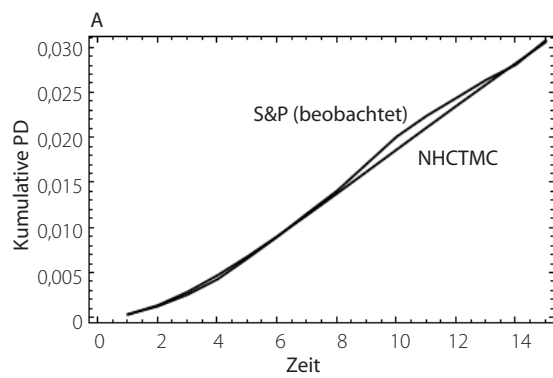
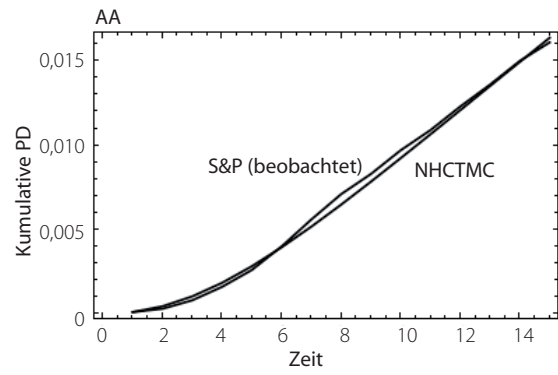
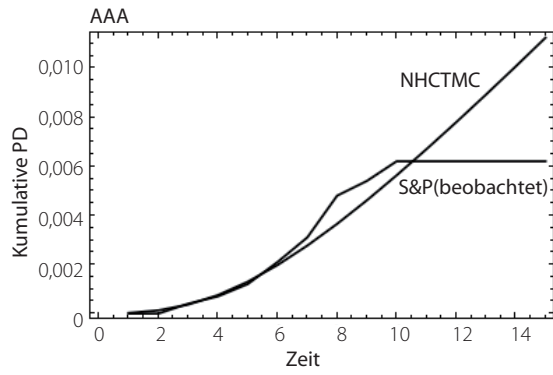
$$\varphi_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ \varphi_{\alpha, \beta}(t) & \text{if } i = j \end{cases} \quad (4)$$

Weil  $\Phi(t)$  eine diagonale Matrix ist, ist  $Q_t$  eine Q-Matrix

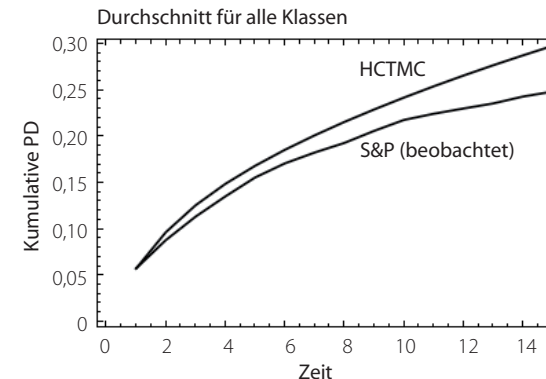
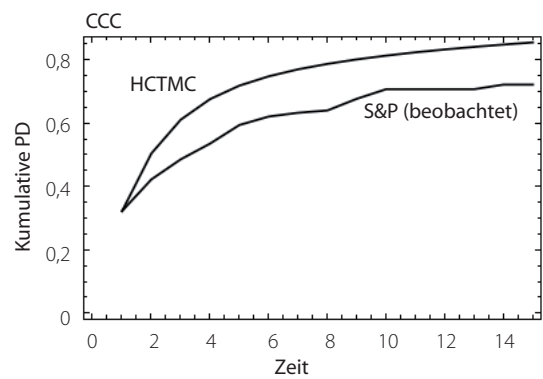
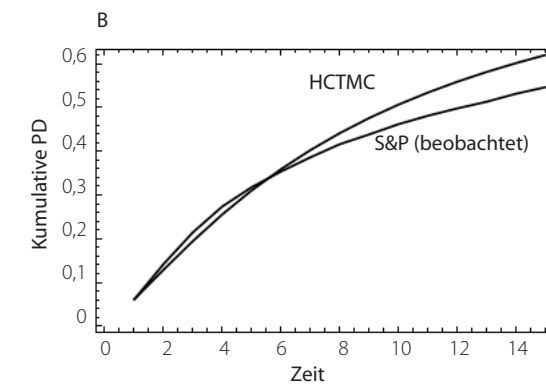
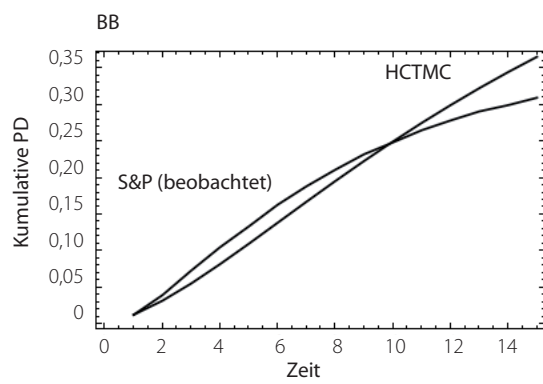
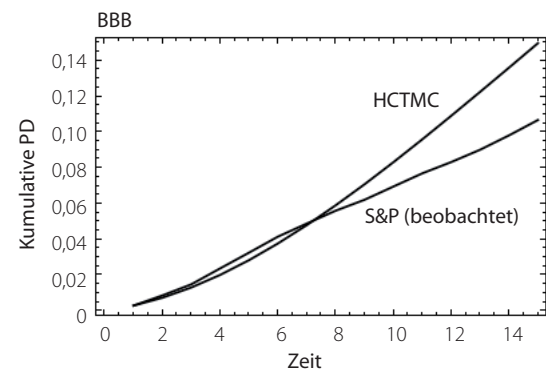
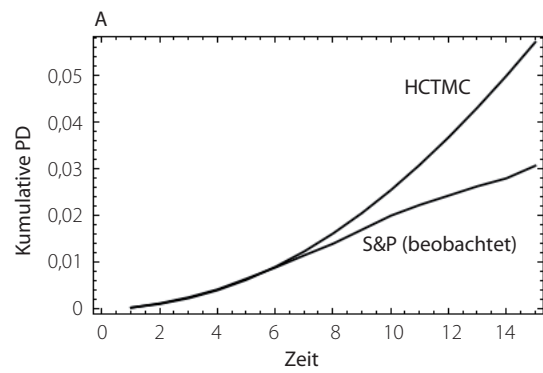
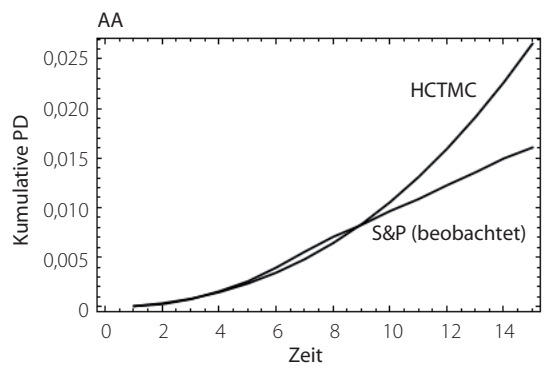
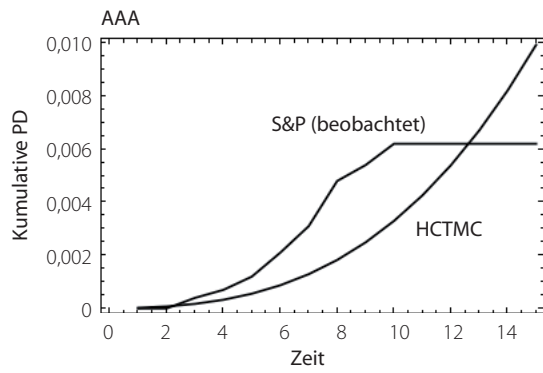
### B. Die optimalen $\alpha$ - und $\beta$ -Vektoren

	$\alpha$	$\beta$
AAA	0,34	0,89
AA	0,11	0,26
A	0,81	0,65
BBB	0,23	0,30
BB	0,32	0,56
B	0,23	0,40
CCC	2,15	0,46

2 PD Term Structures basierend auf dem Ansatz mit nicht homogenen Markov-Ketten mit stetiger Zeit (NHCTMC)



3 PD Term Structures basierend auf dem Ansatz mit homogenen Markov-Ketten mit stetiger Zeit (HCTMC)



**Anhang I: Stochastische Begründung des NHCTMC-Ansatzes**

In diesem Anhang gehen wir kurz auf die stochastische Begründung unseres Ansatzes ein. Um der Einfachheit der Schreibweise willen bezeichnen wir mit  $\Psi(t)$  die diagonale Matrix mit den diagonalen Elementen:

$$\Psi_{ii}(t) = t\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t) \quad (i = 1, \dots, 8; t \geq 0)$$

Für die Übergangsmatrix  $M_t$  in (5) für den Zeitraum  $[0, t]$  können wir dann schreiben:

$$M_t = \exp(\Psi(t) \times Q) \quad (t \geq 0) \tag{6}$$

Wenn wir die Exponentialmatrix als eine Potenzreihe schreiben und für den Markov-Kern die typische Schreibweise  $P_{0,t} = M_t$  verwenden, ergibt eine gliedweise erfolgende Differenzierung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_{0,t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial (\Psi(t) \times Q)^k}{\partial t} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) \times Q \right) \times \frac{(\Psi(t) \times Q)^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) \times Q \right) \times P_{0,t} \end{aligned} \tag{7}$$

Da  $\Psi(t)$  eine diagonale Matrix ist, ist:

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t}$$

die diagonale Matrix mit den Einträgen  $\Psi'_{ii}(t)$ . Daher ist die Matrix:

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} \times Q$$

eine Q-Matrix, wobei wir wie oben argumentieren können, dass  $\Psi(t) \times Q$  sei eine Q-Matrix ist, hierbei berücksichtigend, dass zu allen Zeitpunkten  $t$  gilt, dass  $\Psi'_{ii}(t) \geq 0$ . Aus der allgemeinen Markov-Theorie (siehe Ethier & Kurtz (2005), Theorem 7.3 in Kapitel 4, Lando & Skodeberg (2002) und Schönbucher (2005)) ergibt sich, dass Gleichung (7) ist Teil der Forward-Gleichung einer nicht homogenen Markov-Kette  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit Zustandsraum  $\{1, 2, \dots, 8\}$  korrespondierend zu einer Halbgruppe  $\{P_{s,t} \mid 0 \leq s \leq t\}$  ist, welche die Kolmogorov-Forward- und Backward-Gleichungen erfüllt, welche assoziiert sind zu der Familie:

$$\left\{ \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} \times Q \mid t \geq 0 \right\}$$

die den infinitesimalen Generator des Markov-Prozesses definiert. Gleichung (7) zeigt, dass die nicht homogene Markov-Kette in stetiger Zeit  $(X_t)_{t \geq 0}$  die in Abbildung 2 veranschaulichten PD Term Structures anhand der Ausfallspalte der kernbasierten Übergangsmatrices  $P_{0,t} = M_t = \exp(\Psi(t) \times Q)$  induziert.

<sup>1</sup> Es gilt  $(1 - \exp(-\alpha))\Psi'_{ii}(t) = \alpha \exp(-\alpha t)^{\beta} + (1 - \exp(-\alpha t))^{\beta-1} \geq 0$  für alle  $t \geq 0$

**Anhang II: Beispiel für einen Generator, der zwar gut an Migrationen, aber schlecht an die beobachteten Ausfallhäufigkeiten angepasst ist**

Das folgende Beispiel stammt aus Bluhm & Oberbeck (2006), Abschnitt 2.3.1. Wir beginnen mit der korrigierten<sup>1</sup> durchschnittlichen Migrationsmatrix  $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,8}$ , die in Tabelle C dargestellt ist und der die Tabelle 9 in Standard & Poor's (2005) zugrunde liegt, welche die von S&P beobachteten durchschnittlichen historischen jährlichen Migrationsraten beinhaltet.

Tabelle D zeigt die Kalibrierung eines Generators (Q-Matrix)  $Q$  basierend auf der Log-Expansion von  $M$  und einer so genannten diagonalen Korrektur. Die von uns verwendete Methode ist ein Standardverfahren für die Kalibrierung von Generatormatrices (siehe etwa Kreinin & Sidelnikova (2001)). Die Approximation der originalen Matrix  $M$  durch  $\exp(Q)$  ist durchaus akzeptabel und hat den folgenden geringen Approximationsfehler:

$$\|M - \exp(Q)\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^8 (m_{ij} - (\exp(Q))_{ij})^2} \approx 0,00023$$

Wir können nunmehr PD Term Structures generieren, welchen die homogene Markov-Kette in stetiger Zeit zugrunde liegt, die durch  $Q$  generiert wird via:

$$p_R^{(t)} = (\exp(tQ))_{Zeile(R),8} \quad (t \geq 0)$$

wie in (1) in der Einleitung. In Abbildung 3 wird das Ergebnis dieser Berechnung mit den empirisch beobachteten Ausfallhäufigkeiten verglichen, die ebenfalls dem S&P-Bericht (2005) entnommen wurden. Das Bild ist recht enttäuschend: trotz der guten Anpassung des Exponentials der Q-Matrix bezüglich  $M$  spiegeln sich die empirischen Ausfallhäufigkeiten nicht in den durch das Modell implizierten PD Term Structures wider, die aus dem gewählten homogenen Markov-Ketten-Ansatz abgeleitet wurden. Aus Abbildung 2 geht jedoch hervor, dass sich das Bild komplett zum Guten wendet, wenn wir die Homogenitätsannahme fallen lassen.

**C. Modifizierte durchschnittliche einjährige Migrationsmatrix M (%)**

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	91,68	7,69	0,48	0,09	0,06	0,00	0,00	0,00
AA	0,62	90,49	8,10	0,60	0,05	0,11	0,02	0,01
A	0,05	2,16	91,34	5,77	0,44	0,17	0,03	0,04
BBB	0,02	0,22	4,07	89,72	4,68	0,80	0,20	0,29
BB	0,04	0,08	0,36	5,78	83,38	8,05	1,03	1,28
B	0,00	0,07	0,22	0,32	5,84	82,53	4,78	6,24
CCC	0,09	0,00	0,36	0,45	1,52	11,17	54,06	32,35
D	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

Anmerkung: siehe Standard & Poor's (2005)

**D. Approximativer Generator Q für M (%)**

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-8,73	8,44	0,15	0,07	0,06	0,00	0,00	0,00
AA	0,68	-10,13	8,91	0,38	0,02	0,12	0,02	0,00
A	0,05	2,37	-9,31	6,37	0,33	0,15	0,03	0,02
BBB	0,02	0,19	4,49	-11,17	5,39	0,65	0,22	0,21
BB	0,04	0,08	0,24	6,68	-18,71	9,63	1,15	0,88
B	0,00	0,08	0,22	0,12	7,01	-20,06	7,09	5,55
CCC	0,13	0,00	0,47	0,54	1,61	16,59	-62,22	42,88
D	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

<sup>1</sup> Die Zeilen werden zwecks Ermittlung einer stochastischen Matrix normalisiert, und die PD für AAA wird mit 0,2 Basispunkten angesetzt, wobei eine lineare Regression der PD auf einer logarithmischen Skala zugrunde liegt.

(Skalierung der Zeilen einer Q-Matrix ergibt eine Q-Matrix). Die Funktionen  $\varphi_{\alpha, \beta}$  bezüglich der Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  sind wie folgt definiert. Gesetzt sei:

$$\varphi_{\alpha, \beta} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), t \mapsto \varphi_{\alpha, \beta}(t) = \frac{(1 - e^{-\alpha t}) t^{\beta-1}}{1 - e^{-\alpha}}$$

für die nicht negativen Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$ . Abbildung 1 veranschaulicht die Funktionen  $t \mapsto t\varphi_{\alpha, \beta}(t)$ . Sie haben folgende Eigenschaften:

- 1.  $\varphi_{\alpha, \beta}(1) = 1$  (normalisiert zum Zeitpunkt  $t = 1$ ; gilt per Konstruktion) und
- 2.  $t\varphi_{\alpha, \beta}(t)$  steigt im Zeitparameter  $t \geq 0$ .
- 3. Im Zähler von  $t\varphi_{\alpha, \beta}$  ist der erste Faktor  $(1 - e^{-\alpha t})$  die Verteilungsfunktion einer exponential verteilten Zufallsvariable mit der Intensität  $\alpha$ ; der zweite Faktor  $t^\beta$  kann jeweils als Korrekturterm für Konvexität oder Konkavität betrachtet werden<sup>5</sup>.

Eigenschaft 1 ist notwendig, um sicherzustellen, dass die gegebene einjährige Migrationsmatrix  $M = \exp(Q)$  und ihre nicht homogene Modifikation  $\exp(Q_t)$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  konsistent sind. Eigenschaft 2 ist notwendig zur Aufrechterhaltung der Zeitrichtung (die sich in die Zukunft und nicht in die Vergangenheit bewegt). Eigenschaft 3 zeigt, dass die spezielle Form der Funktionen  $\varphi_{\alpha, \beta}$ , welche unter Umständen die Vermutung einer ad hoc Parameterisierung erwecken könnte, keineswegs beliebig gewählt ist, sondern zu gut verstandenen Funktionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie in Beziehung steht. Im Folgenden fassen wir unsere Ergebnisse zusammen und betonen an dieser Stelle, dass es sich bei unserem Modell um einen interpolierenden Ansatz handelt: der Ansatz beruht auf einem passenden parametrischen Modell das sich gut auf empirisch gegebene kumulative Ausfallraten anpassen lässt, um diese zu interpolieren. Das Attribut „passend“ bedeutet hierbei weder ‚einzigartig‘ noch ‚natürlich gegeben‘, sondern lediglich, dass wir Funktionen  $\varphi_{\alpha, \beta}$  gefunden haben, die wir ausserdem ausreichend mathematisch begründen können, um in der Anwendung der Definition von  $Q_t$  brauchbare Interpolationsergebnisse zu erhalten (siehe Abbildung 2).

Da die funktionale Form der zeitabhängigen Generatoren ( $Q_t$ ),

durch Gleichung (4) festgelegt ist, werden die Generatoren  $Q_t$  ausschließlich durch die zwei Vektoren  $(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$  und  $(\beta_1, \dots, \beta_8)$  in  $[0, 1]^8$  bestimmt. Für jedes gewählte Parameter-Vektoren-Paar können wir jetzt eine Term Structure kumulativer PDs generieren, indem wir Migrationsmatrizen  $M_t$  für den Zeitraum  $[0, t]$  wie folgt berechnen:

$$M_t = \exp(tQ_t) \quad (t \geq 0) \quad (5)$$

Der letzte Schritt besteht in einer geeigneten Wahl<sup>6</sup> von  $(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$  und  $(\beta_1, \dots, \beta_8)$  hinsichtlich der besten Anpassung der durch die Ausfall-Spalte der Migrationsmatrices (5) generierten Term Structure an die empirischen Term Structures der Ausfallhäufigkeiten von S&P (Standard & Poor's, 2005). Als Distanzmaß für eine optimale Wahl dieser Vektoren verwenden wir die mittlere quadratische Abweichung. Tabelle B und Abbildung 2 zeigen die sich ergebenden optimal angepassten  $\alpha$ - und  $\beta$ -Vektoren, sowie die resultierenden (NHCTMC-implizierten) Term Structures im Vergleich mit den empirisch beobachteten mehrjährigen Ausfallhäufigkeiten von S&P.

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir einen Markov-Ketten-Ansatz gefunden haben, um die durch das Modell implizierten PD Term Structures in stetiger Zeit so zu kalibrieren, dass sie den empirisch beobachteten Ausfallhäufigkeiten sehr gut entsprechen. Wesentlich für unseren Ansatz war es, eine nicht homogene Zeitentwicklung der zugrundeliegenden Markov-Kette zu akzeptieren. Für die Kalibrierung der Parameter haben wir eine einjährige Migrationsmatrix sowie beobachtete Ausfallhäufigkeiten zugrunde gelegt. Wie zuvor erwähnt, handelt es sich hier um einen interpolierenden und nicht um einen extrapolierenden Ansatz, denn die Anpassung ist nur innerhalb des Zeitfensters der Beobachtungen möglich.<sup>7</sup> ■

Christian Bluhm leitet das Kreditportfoliomanagement der Credit Suisse in Zürich. Ludger Overbeck ist Professor für Mathematik an der Universität Giessen. Email: christian.bluhm@credit-suisse.com, ludger.overbeck@web.de

<sup>5</sup> Man beachte, dass  $\varphi_{\alpha, \beta}$  eine gewisse Ähnlichkeit mit der Gamma-Verteilung aufweist, die häufig im Kontext der Warteschlangentheorie und der Zuverlässigkeitsanalyse angewendet wird.

<sup>6</sup> Man beachte, dass  $\alpha_8$  und  $\beta_8$  keine Bedeutung haben und auf einen beliebigen Wert festgelegt werden können.

<sup>7</sup> Im Gegensatz zu homogenen Markov-Ketten, wo Extrapolation eher selbstverständlich ist.

### Anhang III: Zugrunde liegende Daten und Kalibrierung für Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt den sehr guten modellbasierten Fit der empirisch beobachteten kumulativen Ausfallhäufigkeiten, den wir durch den im Hauptartikel beschriebenen Ansatz mit einer nicht homogenen Markov-Kette in stetiger Zeit (NHCTMC) erhalten. In diesem Anhang erläutern wir kurz die zugrunde liegenden Daten und die Modellkalibrierung, die zu Abbildung 2 führen.

Das von uns verwendete parametrische Modell hat zwei Hauptkomponenten: einen zeithomogenen Generator  $Q$  (für Erläuterungen und Referenzen, siehe Anhang II) und die Funktionen  $\varphi_{\alpha, \beta}$  für die die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Vektoren zu kalibrieren sind. Die Kalibrierung erfolgt dann so.

In dem Bericht von Standard & Poor's (2005), dem auch die Migrationsdaten für die Kalibrierung von  $Q$  entstammen, finden wir auch die empirisch beobachteten kumulativen durchschnittlichen Ausfallraten (15 jährliche kumulative Werte basierend auf Beobachtungen der Ausfallraten von 1981-2004); siehe dazu Tabelle 11 im S&P-Bericht. Im Rahmen unserer Testberechnungen haben wir auch mit anderen Datensätzen experimentiert.

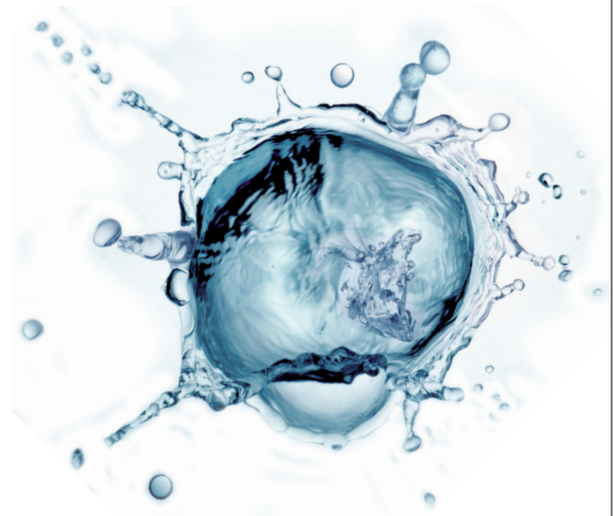
In allen berücksichtigten Fällen konnten wir  $\alpha$ - und  $\beta$ -Vektoren für unser NHCTMC-Modell kalibrieren, deren Interpolationsergebnisse ebenso gut waren wie in Abbildung 2. Das Modell beinhaltet einen ausreichenden Flexibilitätsgrad in seiner Parametrisierung, um für eine gute Anpassung in der Interpolation zu sorgen. Die im Rahmen der Bestimmung der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Vektoren zu minimierende Zielgröße lautet:

$$\text{Distanz} \left[ \left( \hat{p}_R^{(t)} \right)_{t;R}, \left( (M_t)_{\text{Zeit}(R),8} \right)_{t;R} \right] = \text{Unbedeutend} \quad (8)$$

wobei  $M_t$  in (5) definiert ist und  $\hat{p}_R^{(t)}$  die empirische kumulative durchschnittliche Ausfallrate von S&P im Jahr  $t$  für die Ratingklasse  $R$  bezeichnet. Wie bereits gesagt haben wir als Distanzmaß für das durch (8) bestimmte Optimierungsproblem die mittlere quadratische Abweichung verwendet. Die Optimierung ist problemlos mit gängiger mathematischer Software wie Mathematica oder Matlab durchführbar.

## Quellenangaben

- Basel Committee on Banking Supervision, 2004**  
*International convergence of capital measurement and capital standards*  
Bank for International Settlements, Juni
- Bluhm C und L Overbeck, 2006**  
*Structured credit portfolio analysis, baskets & CDOs*  
Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, CRC Press
- Bluhm C, L Overbeck und C Wagner, 2003**  
*An introduction to credit risk modeling*  
Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, zweite Auflage, CRC Press
- Ethier S und T Kurtz, 2005**  
*Markov processes characterization and convergence*  
John Wiley and Sons
- Frydman H und T Schuermann, 2005**  
*Credit rating dynamics and Markov mixture models*  
Arbeitspapier, Juni
- Israel R, J Rosenthal und J Wei, 2001**  
*Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices with application to credit ratings*  
Mathematical Finance 11 (2), Seiten 245–265
- Jarrow R, D Lando und S Turnbull, 1997**  
*A Markov model for the term structure of credit risk spreads*  
Review of Financial Studies 10, Seiten 481–523
- Kadam A und P Lenk, 2005**  
*Heterogeneity in ratings migration*  
Arbeitspapier, Oktober
- Kreinin A und M Sidelnikova, 2001**  
*Regularization algorithms for transition matrices*  
Algo Research Quarterly 4 (1/2), Seiten 25–40
- Lando D und T Skodeberg, 2002**  
*Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations*  
Journal of Banking and Finance 26 (2–3), Seiten 423–444
- Noris J, 1998**  
*Markov chains*  
Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press
- Sarfaraz A, M Cohen und S Liberos, 2004**  
*Use of transition matrices in risk management and valuation*  
Fair Isaac Weißbuch, September
- Schoenbuecher P, 2005**  
*Portfolio losses and the term structure of loss transition rates: a new methodology for the pricing of portfolio credit derivatives*  
NCCR FinRisk Arbeitspapier 264, September
- Schuermann T und Y Jafry, 2003a**  
*Measurement and estimation of credit migration matrices*  
Arbeitspapier 03-08, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania
- Schuermann T und Y Jafry, 2003b**  
*Metrics for comparing credit migration matrices*  
Arbeitspapier 03-09, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania
- Standard & Poor's, 2005**  
*Annual global corporate default study: corporate defaults poised to rise in 2005*  
S&P Global Fixed Income Research, Januar
- Trueck S und E Oezturkmen, 2003**  
*Adjustment and application of transition matrices in credit risk models*  
Arbeitspapier, Universität Karlsruhe, September



# Starke Wirkung

## Preiswert

Nachdrucke aus *Deutsches Risk* sind sehr wirksame und kosteneffiziente Werbung.

Sie können entsprechend Ihren Wünschen mit Ihrem Firmenlogo, Ihrer Marke sowie Werbeanzeigen versehen werden. Alles über maßgeschneiderte Preise und Konzepte bespricht mit Ihnen [stuart.willes@incisivemedia.com](mailto:stuart.willes@incisivemedia.com)

